変分原理

2010/07　鈴木幸人

関数 $\varphi:(x,t)\mapsto\varphi(x,t),\varphi\in C^1(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R})$ を考える。

Lagrangian 密度：$L\in C^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R})$ と $K\subset\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}:\mathrm{compact}$ が与えられたとき、作用と呼ばれる汎関数 $J_K:C^1(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ を

$$J_K[\varphi]\coloneqq\int_K L(\varphi_t,\varphi_x,\varphi)dtdx \tag{1}$$

と定義する。

汎関数 $J_K:C^1(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ の $\varphi\in C^1(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R})$ における変分 $\delta J_K[\varphi;*]\in C^1(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R})^*$ は

$$J_K[\varphi+h]-J_K[\varphi]=\delta J_K[\varphi;h]+o(\|h\|_K),\quad h\in C^1(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}),\|h\|_K\to 0 \tag{2}$$

ただし

$$\|h\|_K\coloneqq\max_{(x,t)\in K}|h(x,t)|+\sum_{i=1}^n\max_{(x,t)\in K}\left|h_{x_i}(x,t)\right|+\max_{(x,t)\in K}|h_t(x,t)| \tag{3}$$

を満たす連続な線型汎関数であると定義される。

変分原理$:\forall K\subset\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}:\mathrm{compact},\forall h\in C_0^1(K),\delta J_K[\varphi;h]=0$ なる [1] $\varphi\in C^1(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R})$ が実現する運動を表す。

任意の $h\in C_0^1(K)$ に対して

$$\begin{aligned}J_K[\varphi+h]-J_K[\varphi]&=\int_K[L(\varphi_t+h_t,\varphi_x+h_x,\varphi+h)-L(\varphi_t,\varphi_x,\varphi)]dtdx\\&=\int_K\left[L_{\varphi_t}h_t+L_{\varphi_{x_j}}h_{x_j}+L_\varphi h\right]dtdx+R\\&=\int_K\left[-\frac{\partial}{\partial t}L_{\varphi_t}-\frac{\partial}{\partial x_j}\cdot L_{\varphi_{x_j}}+L_\varphi\right]hdtdx+R,\end{aligned} \tag{4}$$

$$R\coloneqq\int_K\int_0^1(1-\theta)\frac{d^2}{d\theta^2}L(\varphi_t+\theta h_t,\varphi_x+\theta h_x,\varphi+\theta h)\,d\theta\,dtdx$$

が成り立つ [2]。ここで $\|h\|_K<M_h\ (\exists M_h>0)$ なる $h\in C_0^1(K)$ に対して

---

[1] これは $\forall K\subset\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}:\mathrm{compact},\delta J_K[\varphi;*]=0$ as $C_0^1(K)^*$ を意味している。

[2] $f(x+h)-f(x)=\int_0^1\frac{d}{d\theta}f(x+\theta h)d\theta$

$$=\left[(\theta-1)\frac{d}{d\theta}f(x+\theta h)\right]_0^1-\int_0^1(\theta-1)\frac{d^2}{d\theta^2}f(x+\theta h)d\theta$$

$$=f'(x)h+\int_0^1(1-\theta)\frac{d^2}{d\theta^2}f(x+\theta h)d\theta$$

$$
\begin{aligned}
|R| &\leq \int_K \int_0^1 |1-\theta| \left| \frac{d^2}{d\theta^2} L(\varphi_t + \theta h_t, \varphi_x + \theta h_x, \varphi + \theta h) \right| d\theta\, dtdx \\
&\leq \int_K \int_0^1 \Big| L_{\varphi_t \varphi_t} (h_t)^2 + L_{\varphi_{x_j} \varphi_{x_k}} \left(h_{x_j} h_{x_k} \right) + L_{\varphi\varphi} (h)^2 \\
&\qquad + 2 L_{\varphi_t \varphi_{x_j}} \left(h_t h_{x_j} \right) + 2 L_{\varphi_{x_j} \varphi} \left(h h_{x_j} \right) + 2 L_{\varphi \varphi_t} h h_t \Big| d\theta dtdx \\
&\leq M \int_K \left| (h_t)^2 + \sum_{j,k=1}^n h_{x_j} h_{x_k} + h^2 + 2h_t \sum_{j=1}^n h_{x_j} + 2h \sum_{j=1}^n h_{x_j} + 2hh_t \right| dtdx \qquad (5) \\
&= M \int_K \left| h_t + \sum_{j=1}^n h_{x_j} + h \right|^2 dtdx \leq M|K| \max_{(x,t)\in K} \left| h_t + \sum_{j=1}^n h_{x_j} + h \right|^2 \\
&\leq M|K| \left[\max_{(x,t)\in K} |h_t| + \sum_{j=1}^n \max_{(x,t)\in K} \left| h_{x_j} \right| + \max_{(x,t)\in K} |h| \right]^2 \leq M|K| \|h\|_K^2
\end{aligned}
$$

ただし

$$
\begin{aligned}
M_{tt} &\coloneqq \max_{|t|,|x|,|a| \leq \|\varphi\| + M_h} \left| L_{\varphi_t \varphi_t}(t,x,a) \right|, \\
M_{xx} &\coloneqq \max_{|t|,|x|,|a| \leq \|\varphi\| + M_h, i,j=1,\dots,n} \left| L_{\varphi_{x_i} \varphi_{x_j}}(t,x,a) \right|, \\
M_{aa} &\coloneqq \max_{|t|,|x|,|a| \leq \|\varphi\| + M_h} \left| L_{\varphi\varphi}(t,x,a) \right|, \\
M_{tx} &\coloneqq \max_{|t|,|x|,|a| \leq \|\varphi\| + M_h, i=1,\dots,n} \left| L_{\varphi_t \varphi_{x_i}}(t,x,a) \right|, \qquad (6) \\
M_{xa} &\coloneqq \max_{|t|,|x|,|a| \leq \|\varphi\| + M_h, i=1,\dots,n} \left| L_{\varphi_{x_i} \varphi}(t,x,a) \right|, \\
M_{at} &\coloneqq \max_{|t|,|x|,|a| \leq \|\varphi\| + M_h} \left| L_{\varphi \varphi_t}(t,x,a) \right| \\
M &\coloneqq \max\{M_{tt}, M_{xx}, M_{aa}, M_{tx}, M_{xa}, M_{at}\}, \\
|K| &\coloneqq \int_K dtdx
\end{aligned}
$$

であるから

$$
R = o(\|h\|_K), \quad \|h\|_K \to 0 \qquad (7)
$$

したがって

$$
\delta J_K[\varphi; h] = \int_K \left[-\frac{\partial}{\partial t} L_{\varphi_t} - \frac{\partial}{\partial x_j} L_{\varphi_{x_j}} + L_\varphi \right] h dtdx \qquad (8)
$$

が得られる。

任意の $h \in C_0^1(R)$ に対して $\delta J_K[\varphi; h] = 0$ となることから Euler-Lagrange 方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} L_{\varphi_t} + \frac{\partial}{\partial x_j} L_{\varphi_{x_j}} - L_\varphi = 0 \tag{9}$$

が導かれる。

一般に Lagrangian 密度が高階微分を含む場合：$L(\varphi, \varphi_t, \varphi_x, \varphi_{tt}, \varphi_{tx}, \varphi_{xx}, \dots)$ には

$$L_\varphi - \frac{\partial}{\partial t} L_{\varphi_t} - \frac{\partial}{\partial x_j} L_{\varphi_{x_j}} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} L_{\varphi_{tt}} + \frac{\partial^2}{\partial t \partial x_j} L_{\varphi_{tx_j}} + \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} L_{\varphi_{x_j x_k}} + \cdots = 0 \tag{10}$$

となる。

（例）

Klein-Gordon

$$\begin{aligned} &\varphi_{tt} - \alpha^2 \varphi_{x_j x_j} + \beta^2 \varphi = 0, \quad \omega = \pm\sqrt{\alpha^2 |\kappa|^2 + \beta^2}, \\ &L(\varphi_t, \varphi_x, \varphi) = \frac{1}{2}\varphi_t^2 - \frac{1}{2}\alpha^2 \varphi_{x_j}^2 - \frac{1}{2}\beta^2 \varphi^2 \end{aligned} \tag{11}$$

Boussinesq

$$\begin{aligned} &\varphi_{tt} - \alpha^2 \varphi_{x_j x_j} = \beta^2 \varphi_{tt x_j x_j}, \quad \omega = \pm \frac{\alpha |\kappa|}{\sqrt{1 + \beta^2 |\kappa|^2}}, \\ &L(\varphi_t, \varphi_x, \varphi_{tx}) = \frac{1}{2}\varphi_t^2 - \frac{1}{2}\alpha^2 \varphi_{x_j}^2 + \frac{1}{2}\beta^2 \varphi_{tx_j}^2 \end{aligned} \tag{12}$$

beam

$$\begin{aligned} &\varphi_{tt} + \gamma^2 \varphi_{xxxx} = 0, \quad \omega = \pm\gamma\kappa^2, \\ &L(\varphi_t, \varphi_{xx}) = \frac{1}{2}\varphi_t^2 - \frac{1}{2}\gamma^2 \varphi_{xx}^2 \end{aligned} \tag{13}$$

である [3]。

ゆっくり変化する波列

$$\begin{aligned} &\varphi(x,t) = \Re\left(A(x,t) e^{i\theta(x,t)}\right) = a(x,t)\cos[\theta(x,t) + \eta(x,t)], \\ &a = |A|, \quad \eta = \arg A \end{aligned} \tag{14}$$

ただし

---

[3] それぞれ

$$-\frac{\partial}{\partial t} L_{\varphi_t} - \frac{\partial}{\partial x_i} L_{\varphi_{x_i}} + L_\varphi = -\frac{\partial}{\partial t}\varphi_t + \frac{\partial}{\partial x_i}\alpha^2 \varphi_{x_i} - \beta^2 \varphi = -\varphi_{tt} + \alpha^2 \varphi_{x_i x_i} - \beta^2 \varphi = 0,$$

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial t} L_{\varphi_t} - \frac{\partial}{\partial x_i} L_{\varphi_{x_i}} + \frac{\partial^2}{\partial t \partial x_i} L_{\varphi_{tx_i}} &= -\frac{\partial}{\partial t}\varphi_t + \frac{\partial}{\partial x_i}\alpha^2 \varphi_{x_i} + \frac{\partial^2}{\partial t \partial x_i}\beta^2 \varphi_{tx_i} \\ &= -\varphi_{tt} + \alpha^2 \varphi_{x_i x_i} + \beta^2 \varphi_{tt x_i x_i} = 0 \end{aligned}$$

$$-\frac{\partial}{\partial t} L_{\varphi_t} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} L_{\varphi_{xx}} = -\frac{\partial}{\partial t}\varphi_t - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\gamma^2 \varphi_{xx} = -\varphi_{tt} - \gamma^2 \varphi_{xxxx} = 0$$

である。

$$k_i \coloneqq \theta_{x_i}, \quad \omega \coloneqq -\theta_t$$
$$\frac{a_{x_j}}{a}, \frac{a_t}{a} \ll 1, \ \frac{\eta_{x_j}}{\eta}, \frac{\eta_t}{\eta} \ll 1, \ \frac{k_{i,x_j}}{k_i}, \frac{k_{i,t}}{k_i} \ll 1, \ \frac{\omega_{x_j}}{\omega}, \frac{\omega_t}{\omega} \ll 1 \quad (i, j = 1,2,3) \tag{15}$$
を考える。

ゆっくり変化する波列に対しては
$$\begin{aligned} \varphi_t &= a_t \cos(\theta + \eta) - a(\theta_t + \eta_t) \sin(\theta + \eta) \\ &\sim -a\theta_t \sin(\theta + \eta) = a\omega \sin(\theta + \eta), \\ \varphi_{x_j} &\sim -a\theta_{x_j} \sin(\theta + \eta) = -ak_j \sin(\theta + \eta) \end{aligned} \tag{16}$$
であるから、特に Klein-Gordon 方程式の場合には
$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}\varphi_t^2 - \frac{1}{2}\alpha^2\varphi_{x_j}^2 - \frac{1}{2}\beta^2\varphi^2 \\ &\sim \frac{1}{2}a^2\left(\omega^2 - \alpha^2 k_j^2\right)\sin^2(\theta + \eta) - \frac{1}{2}\beta^2 a^2 \cos^2(\theta + \eta) \end{aligned} \tag{17}$$
したがって
$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2}a^2\left(\omega^2 - \alpha^2 k_j^2\right)\sin^2(\theta + \eta) - \frac{1}{2}\beta^2 a^2 \cos^2(\theta + \eta)\right] d\theta \\ &\sim \frac{a^2}{4}\left(\omega^2 - \alpha^2 k_j^2 - \beta^2\right) \end{aligned} \tag{18}$$
が得られる[4]。

そこで
$$\mathcal{L}(\theta_t, \theta_x, a) = \frac{a^2}{4}\left[(\theta_t)^2 - \alpha^2\left(\theta_{x_j}\right)^2 - \beta^2\right] \tag{19}$$
と定義し、"平均変分原理"
$$\begin{aligned} &J_K[a, \theta] = \int_K \mathcal{L}(\theta_t, \theta_x, a)\, dt\, dx, \\ &\delta J_K[a, \theta; \delta a, \delta\theta] = 0 \quad \left(\forall K \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}\text{: compact}, \ \forall \delta a, \delta\theta \in C_0^1(K)\right) \end{aligned} \tag{20}$$

---

[4] ここで ω, k, a の一周期にわたる変化は微小量として無視できるとしている。例えば
$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} k(x)\theta_x(x)dx &\sim \int_{x_1}^{x_2} [k(x_1) + k_x(x_1)(x - x_1)]\theta_x(x)dx \\ &= k(x_1)\int_{x_1}^{x_2} \theta_x(x)dx + k_x(x_1)\int_{x_1}^{x_2} (x - x_1)\theta_x(x)dx \\ &\sim k_1 \int_{x_1}^{x_2} \theta_x(x)dx \end{aligned}$$
である。なお
$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sin^2(\theta + \eta)\, d\theta &= \int_\eta^{2\pi+\eta} \sin^2\phi\, d\phi = \int_0^{2\pi} \sin^2\phi\, d\phi = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\{\sin^2\phi + \sin^2\phi\} d\phi \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \{1 - [\cos^2\phi - \sin^2\phi]\} d\phi = \frac{1}{2}\left\{2\pi - \int_0^{2\pi} \cos 2\phi\, d\phi\right\} \\ &= \pi - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sin 2\phi\right]_0^{2\pi} = \pi \end{aligned}$$
である。

を提案する。この Euler-Lagrange 方程式は

$$\begin{aligned} &\delta a: \quad \mathcal{L}_a = 0, \\ &\delta\theta: \quad \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{L}_{\theta_t} + \frac{\partial}{\partial x_j}\mathcal{L}_{\theta_{x_j}} = 0 \end{aligned} \tag{21}$$

となる[5]。これを $k_i = \theta_{x_i}, \omega = -\theta_t$ を用いて書き換えると

$$\mathcal{L}_a = 0 \tag{22}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{L}_\omega - \frac{\partial}{\partial x_j}\mathcal{L}_{k_j} = 0 \tag{23}$$

$$\frac{\partial k_i}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial x_i} = 0, \quad \frac{\partial k_i}{\partial x_j} - \frac{\partial k_j}{\partial x_i} = 0 \tag{24}$$

となる。

線型問題の場合Lagrangian L は φ とその微分の二次式でなければならない[6]。したがって、これに $\varphi = a\cos(\theta + \eta)$ を代入して得られる平均Lagrangian $\mathcal{L}$ は（a の微分は微小量として無視されるから）次の形をとらなければならない。

$$\mathcal{L} = G(\omega, k)a^2 \tag{25}$$

このとき、(22)式より分散関係

$$G(\omega, k) = 0 \tag{26}$$

が得られる。したがって、これと(24)式に基づいて 11.5 節で述べた議論を展開することができる。例えば $\omega = W(k)$ なる関係を(26)式に代入すると

$$G(W(k), k) = 0 \tag{27}$$

であるが、この両辺を k_j で微分すると

$$G_\omega \frac{\partial W}{\partial k_j} + G_{k_j} = 0 \tag{28}$$

したがって群速度は

---

5 実際、任意の $\delta\theta, \delta a \in C_0^1(R)$ に対して

$$\begin{aligned} \delta\int_R \mathcal{L}(-\theta_t, \theta_{\boldsymbol{x}}, a)\,dt\,dx &= \frac{d}{d\epsilon}\int_R \mathcal{L}(-(\theta + \epsilon\delta\theta)_t, (\theta + \epsilon\delta\theta)_{\boldsymbol{x}}, a + \epsilon\delta a)\,dt\,dx\bigg|_{\epsilon=0} \\ &= \int_R \left(\mathcal{L}_{\theta_t}\frac{\partial}{\partial t}\delta\theta + \mathcal{L}_{\theta_{x_j}}\frac{\partial}{\partial x_j}\delta\theta + \mathcal{L}_a\delta a\right)dt\,dx \\ &= \int_R \left[\left(\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{L}_{\theta_t} + \frac{\partial}{\partial x_j}\mathcal{L}_{\theta_{x_j}}\right)\delta\theta + \mathcal{L}_a\delta a\right]dt\,dx \end{aligned}$$

である。

6 Euler-Lagrange 方程式

$$L_\varphi - \frac{\partial}{\partial t}L_{\varphi_t} - \frac{\partial}{\partial x_j}L_{\varphi_{x_j}} + \frac{\partial^2}{\partial t^2}L_{\varphi_{tt}} + \frac{\partial^2}{\partial t\partial x_j}L_{\varphi_{tx_j}} + \frac{\partial^2}{\partial x_j\partial x_k}L_{\varphi_{x_jx_k}} + \cdots = 0$$

が線型であるためには、$L_\varphi, L_{\varphi_t}, L_{\varphi_{x_j}}, L_{\varphi_{tt}}, L_{\varphi_{tx_j}}, L_{\varphi_{x_jx_k}}, \ldots$ が線型、すなわち L が $\varphi, \varphi_t, \varphi_{x_j}, \varphi_{tt}, \varphi_{tx_j}, \varphi_{x_jx_k}, \ldots$ に関して二次でなければならない。

$$C_j = \frac{\partial W}{\partial k_j} = -G_{k_j}/G_\omega \tag{29}$$

と表される [7]。また (24)式より

$$\frac{\partial k_i}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial x_i} = \frac{\partial k_i}{\partial t} + \frac{\partial W}{\partial k_j}\frac{\partial k_j}{\partial x_i} = \frac{\partial k_i}{\partial t} + C_j \frac{\partial k_i}{\partial x_j} = 0 \tag{30}$$

である。

一方、(23)式は

$$\frac{\partial}{\partial t}[G(\omega,k)a^2]_\omega - \frac{\partial}{\partial x_j}[G(\omega,k)a^2]_{k_j} = \frac{\partial}{\partial t}(G_\omega a^2) - \frac{\partial}{\partial x_j}\left(G_{k_j} a^2\right) = 0 \tag{31}$$

となるが、ここで $g(k) = G_\omega(W(k),k)$ とおくと $G_{k_j} = -C_j G_\omega = -C_j g$ であるから

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}(G_\omega a^2) - \frac{\partial}{\partial x_j}\left(G_{k_j} a^2\right) = \frac{\partial}{\partial t}(g a^2) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(C_j g a^2\right) \\
&\quad = g\left[\frac{\partial a^2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(C_j a^2\right)\right] + a^2\left(\frac{\partial g}{\partial t} + C_j \frac{\partial g}{\partial x_j}\right) \\
&\quad = g\left[\frac{\partial a^2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(C_j a^2\right)\right] + a^2 \frac{\partial g}{\partial k_l}\left(\frac{\partial k_l}{\partial t} + C_j \frac{\partial k_l}{\partial x_j}\right) = 0
\end{aligned} \tag{32}$$

したがって振幅方程式

$$\frac{\partial a^2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(C_j a^2\right) = 0 \tag{33}$$

が得られる。

[7] (26)式が $\omega = W(k)$ と解ける条件は、陰関数定理より $G_\omega \neq 0$ である。

（Noether の定理）

$K=\Omega\times[t_0,t_1]$ とする。配位空間 $M=C^1(\Omega)$ を $q^t\coloneqq\theta(*,t)$ 全体の集合とし[8]、$q^t\in M$ に対応する速度を $\dot{q}^t\coloneqq\theta_t(*,t)\in T_{q^t}M\big(=C(\Omega)\big)$ と定義する。また、Lagrangian $L{:}\,TM\big(\cong C^1(\Omega)\times C(\Omega)\big)\to\mathbb{R}$ を

$$L[q^t,\dot{q}^t]\coloneqq\int_\Omega\mathcal{L}\big(\theta_t(x,t),\theta_x(x,t)\big)dx\quad\left(=\int_\Omega\mathcal{L}\left(\dot{q}^t(x),\frac{\partial q^t}{\partial x}(x)\right)dx\right)\tag{34}$$

と定義する[9]と、作用は

$$J_K[\theta]\left(=\int_K\mathcal{L}(\theta_t,\theta_x)dt\,dx\right)=\int_{t_0}^{t_1}L[q^t,\dot{q}^t]dt\tag{35}$$

である。なお Lagrangian L は（汎関数）微分可能で、その汎関数微分も $[q,\dot{q}]$ の汎関数として微分可能であるとする。すなわち

$$L[q+\delta q,\dot{q}]-L[q,\dot{q}]=\delta_qL[q,\dot{q};\delta q]+o(\|\delta q\|_1),\quad\|\delta q\|_1\to 0\tag{36}$$

および

$$L[q,\dot{q}+\delta\dot{q}]-L[q,\dot{q}]=\delta_{\dot{q}}L[q,\dot{q};\delta\dot{q}]+o(\|\delta\dot{q}\|_0),\quad\|\delta\dot{q}\|_0\to 0\tag{37}$$

を満たす連続な線型写像 $\delta_qL[q,\dot{q};*]{:}\,M\to\mathbb{R}$ および $\delta_{\dot{q}}L[q,\dot{q};*]{:}\,T_qM\to\mathbb{R}$ が存在し[10]、汎関数微分と呼ばれる関数 $(\delta L/\delta q)[q,\dot{q}]\in C(\Omega)$ および $(\delta L/\delta\dot{q})[q,\dot{q}]\in C(\Omega)$ により

$$\begin{aligned}\delta_qL[q,\dot{q};\delta q]&=\int_\Omega\frac{\delta L}{\delta q}[q,\dot{q}](x)\delta q(x)dx,\\ \delta_{\dot{q}}L[q,\dot{q};\delta\dot{q}]&=\int_\Omega\frac{\delta L}{\delta\dot{q}}[q,\dot{q}](x)\delta\dot{q}(x)dx\end{aligned}\tag{38}$$

と表されるものとする。さらに

$$\begin{aligned}\delta_qL[q+\delta q',\dot{q};\delta q]-\delta_qL[q,\dot{q};\delta q]&=\delta_q^2L[q,\dot{q};\delta q,\delta q']+o(\|\delta q'\|_1),\\ \delta_{\dot{q}}L[q+\delta q',\dot{q};\delta\dot{q}]-\delta_{\dot{q}}L[q,\dot{q};\delta\dot{q}]&=\delta_q\delta_{\dot{q}}L[q,\dot{q};\delta\dot{q},\delta q']+o(\|\delta q'\|_1),\\ \delta_qL[q,\dot{q}+\delta\dot{q}';\delta q]-\delta_qL[q,\dot{q};\delta q]&=\delta_{\dot{q}}\delta_qL[q,\dot{q};\delta q,\delta\dot{q}']+o(\|\delta\dot{q}'\|_0),\\ \delta_{\dot{q}}L[q,\dot{q}+\delta\dot{q}';\delta\dot{q}]-\delta_{\dot{q}}L[q,\dot{q};\delta\dot{q}]&=\delta_{\dot{q}}^2L[q,\dot{q};\delta\dot{q},\delta\dot{q}']+o(\|\delta\dot{q}'\|_0),\end{aligned}\tag{39}$$

を満たす連続な双線型写像 $\delta_q^2L[q,\dot{q};*,*]{:}\,M\times M\to\mathbb{R},\delta_q\delta_{\dot{q}}L[q,\dot{q};*,*]{:}\,T_qM\times M\to\mathbb{R}$ および $\delta_{\dot{q}}\delta_qL[q,\dot{q};*,*]{:}\,M\times T_qM\to\mathbb{R},\delta_{\dot{q}}^2L[q,\dot{q};*,*]{:}\,T_qM\times T_qM\to\mathbb{R}$ が存在するものとする。

以上の設定のもとで、任意の $\delta\theta\in C_0^1(K)$ に対して[11]

---

[8] すなわち q^t は t をパラメータとする M 内の曲線と考える。

[9] $TM\coloneqq\cup_{q\in M}T_qM$ は M の接バンドルである。

[10] $\|*\|_1$ と $\|*\|_0$ はそれぞれ Banach 空間 $C^1(\Omega)$ と $C(\Omega)$ のノルムで

$\|q(x)\|_1\coloneqq\sup_{x\in\Omega}|q(x)|+\sum_{j=1}^n\sup_{x\in\Omega}\left|q_{x_j}(x)\right|$

$\|q(x)\|_0\coloneqq\sup_{x\in\Omega}|q(x)|$

により定義される。

[11] $\delta\theta(x,t)=\delta q^t(x)$ である。

$$
\begin{aligned}
J_K[\theta+\delta\theta]-J_K[\theta] &= \int_{t_0}^{t_1} L[q^t+\delta q^t,\dot{q}^t+\delta\dot{q}^t]dt - \int_{t_0}^{t_1} L[q^t,\dot{q}^t]dt \\
&= \int_{t_0}^{t_1} \{L[q^t+\delta q^t,\dot{q}^t+\delta\dot{q}^t] - L[q^t+\delta q^t,\dot{q}^t] \\
&\qquad\qquad + L[q^t+\delta q^t,\dot{q}^t] - L[q^t,\dot{q}^t]\}dt \\
&= \int_{t_0}^{t_1} \big\{\delta_{\dot{q}} L[q^t+\delta q^t,\dot{q}^t;\delta\dot{q}^t] + o(\|\delta\dot{q}^t\|_0) \\
&\qquad +\delta_q L[q^t,\dot{q}^t;\delta q^t] + o(\|\delta q^t\|_1)\big\}dt \\
&= \int_{t_0}^{t_1} \big\{\delta_{\dot{q}} L[q^t,\dot{q}^t;\delta\dot{q}^t] + O(\|\delta q^t\|_1\|\delta\dot{q}^t\|_0) + o(\|\delta\dot{q}^t\|_0) \\
&\qquad +\delta_q L[q^t,\dot{q}^t;\delta q^t] + o(\|\delta q^t\|_1)\big\}dt \\
&= \int_{t_0}^{t_1}\int_\Omega \left\{\frac{\delta L}{\delta\dot{q}}[q^t,\dot{q}^t](x)\delta\dot{q}^t(x) + \frac{\delta L}{\delta q}[q^t,\dot{q}^t](x)\delta q^t(x)\right\}dx\,dt \\
&\qquad + \max_{t\in[t_0,t_1]}[o(\|\delta\dot{q}^t\|_0) + o(\|\delta q^t\|_1) + O(\|\delta q^t\|_1\|\delta\dot{q}^t\|_0)] \\
&= \int_{t_0}^{t_1}\int_\Omega \left\{-\frac{d}{dt}\left(\frac{\delta L}{\delta\dot{q}}[q^t,\dot{q}^t](x)\right) + \frac{\delta L}{\delta q}[q^t,\dot{q}^t](x)\right\}\delta q^t(x)dx\,dt + o(\|\delta\theta\|)
\end{aligned} \tag{40}
$$

が成り立つ[12]ことから、Euler-Lagrange方程式は

$$
\frac{d}{dt}\left(\frac{\delta L}{\delta\dot{q}}[q^t,\dot{q}^t](x)\right) - \frac{\delta L}{\delta q}[q^t,\dot{q}^t](x) = 0 \tag{41}
$$

となる。

一方、配位空間 M において１パラメータ微分同相変換群 $h^s: M\to M, s\in(-\epsilon,\epsilon), \epsilon>0$ が与えられている[13]ものとする。そのとき、変換 $h^s: M\to M$ の $q\in M$ における微分は

---

[12] ここで

$$
\begin{aligned}
&\left|\delta_{\dot{q}} L[q^t+\delta q^t,\dot{q}^t;\delta\dot{q}^t] - \delta_{\dot{q}} L[q^t,\dot{q}^t;\delta\dot{q}^t]\right| = \left|\delta_q\delta_{\dot{q}} L[q^t,\dot{q}^t;\delta\dot{q}^t,\delta q^t] + o(\|\delta q^t\|_1)\right| \\
&\qquad \le \left\|\delta_q\delta_{\dot{q}} L[q^t,\dot{q}^t;*,*]\right\|\|\delta\dot{q}^t\|_0\|\delta q^t\|_1 + o(\|\delta q^t\|_1) \\
&\therefore\ \delta_{\dot{q}} L[q^t+\delta q^t,\dot{q}^t;\delta\dot{q}^t] - \delta_{\dot{q}} L[q^t,\dot{q}^t;\delta\dot{q}^t] = O(\|\delta q^t\|_1\|\delta\dot{q}^t\|_0) + o(\|\delta q^t\|_1)
\end{aligned}
$$

および

$$
\begin{aligned}
&\|\delta\theta\| = \max_{(x,t)\in K}|\delta\theta| + \max_{(x,t)\in K}|\delta\theta_x| + \max_{(x,t)\in K}|\delta\theta_t| \\
&\qquad = \max_{(x,t)\in[t_0,t_1]\times\Omega}|\delta q^t| + \max_{(x,t)\in[t_0,t_1]\times\Omega}|\delta q_x^t| + \max_{(x,t)\in[t_0,t_1]\times\Omega}|\delta\dot{q}^t| \\
&\therefore \max_{t\in[t_0,t_1]}\|\delta\dot{q}^t\|_0 = \max_{(x,t)\in[t_0,t_1]\times\Omega}|\delta\dot{q}^t| \le \|\delta\theta\|, \\
&\quad \max_{t\in[t_0,t_1]}\|\delta q^t\|_1 = \max_{t\in[t_0,t_1]}\{\max_{x\in\Omega}|\delta q^t| + \max_{x\in\Omega}|\delta q_x^t|\} \le \|\delta\theta\| \\
&\therefore \max_{t\in[t_0,t_1]}[o(\|\delta\dot{q}^t\|_0) + o(\|\delta q^t\|_1) + O(\|\delta q^t\|_1\|\delta\dot{q}^t\|_0)] \\
&\qquad = \max_{t\in[t_0,t_1]}[\epsilon_0\|\delta\dot{q}^t\|_0 + \epsilon_1\|\delta q^t\|_1 + C\|\delta q^t\|_1\|\delta\dot{q}^t\|_0] \\
&\qquad \le \epsilon_0\max_{t\in[t_0,t_1]}\|\delta\dot{q}^t\|_0 + \epsilon_1\max_{t\in[t_0,t_1]}\|\delta q^t\|_1 \\
&\qquad\quad + C\max_{t\in[t_0,t_1]}\|\delta q^t\|_1\max_{t\in[t_0,t_1]}\|\delta\dot{q}^t\|_0 \\
&\qquad \le \epsilon_0\|\delta\theta\| + \epsilon_1\|\delta\theta\| + C\|\delta\theta\|^2 = o(\|\delta\theta\|)\ \ (\because \|\delta\theta\|\to 0 \Rightarrow \|\delta\dot{q}^t\|_0, \|\delta q^t\|_1 \to 0)
\end{aligned}
$$

なる関係を用いた。

[13] すなわち $h^s\circ h^t = h^{s+t}$, $h^0 = id_M$ が成り立ち、変換 $h^s: M\to M$ は微分同相であってパ

$$\|h^s[q+\delta q]-h^s[q]-\delta h^s[q;\delta q]\|_0=o(\|\delta q\|_0),\quad \delta q\in T_qM,\|\delta q\|_0\to 0 \tag{42}$$

を満たす連続な線型写像 $\delta h^s[q;*]:T_qM\to T_{h^s[q]}M$ として定義され [14]、連続関数 $\delta h^s/\delta q[q]\in C(\Omega\times\Omega)$ により

$$\delta h^s[q;\delta q](x)=\int_\Omega \frac{\delta h^s}{\delta q}[q](x,y)\delta q(y)dy \tag{43}$$

と表されるものとする。また h^s のパラメータ s に関する微分 $dh^s/ds:M\to M$ は

$$\frac{dh^s}{ds}[q]\coloneqq\lim_{\Delta s\to 0}\frac{h^{s+\Delta s}[q]-h^s[q]}{\Delta s},\quad q\in M \tag{44}$$

と定義する [15]。このとき、ある $\phi\in T_{h^s[q^t]}M,\psi\in T_{q^t}M$ が存在して

$$\begin{aligned}
h^s[q^{t+\Delta t}]-h^s[q^t]&=\delta h^s[q^t;q^{t+\Delta t}-q^t]+o\left(\left\|q^{t+\Delta t}-q^t\right\|_0\right)\phi\\
&=\delta h^s[q^t;\dot q^t\Delta t+o(|\Delta t|)\psi]+o(\|\dot q^t\Delta t+o(|\Delta t|)\psi\|_0)\phi\\
&=\Delta t\cdot\delta h^s[q^t;\dot q^t]+o(|\Delta t|)\cdot\delta h^s[q^t;\psi]+o(|\Delta t|)\phi\\
&=\Delta t\cdot\delta h^s[q^t;\dot q^t]+o(|\Delta t|)\chi,\quad \chi\coloneqq\delta h^s[q^t;\psi]+\phi\in M
\end{aligned} \tag{45}$$

である [16]から

$$\frac{dh^s[q^t]}{dt}\coloneqq\lim_{\Delta t\to 0}\frac{h^s[q^{t+\Delta t}]-h^s[q^t]}{\Delta t}=\delta h^s[q^t;\dot q^t] \tag{46}$$

が成り立つ。

さらに、任意の $q\in M$ において $\delta h^s[q;*]:T_qM\to T_{h^s[q]}M$ は q と s に関して微分可能であり、また任意の $s\in(-\epsilon,\epsilon)$ において $dh^s/ds:M\to M$ は微分可能な変換であるとする。すなわち、任意の $p\in T_qM$ に対して

$$\|\delta h^s[q+\delta q;p]-\delta h^s[q;p]-\delta^2h^s[q;p,\delta q]\|_0=o(\|\delta q\|_0) \tag{47}$$

ラメータ s に関しても微分可能である。

[14] このとき $\exists\phi\in M,\ h^s[q+\delta q]-h^s[q]=\delta h^s[q;\delta q]+o(\|\delta q\|_0)\phi$ である。

[15] このとき

$\lim_{\Delta s\to 0}\left\|h^{s+\Delta s}[q]-h^s[q]-\Delta s\frac{dh^s}{ds}[q]\right\|_1=0$

および

$\sup_{x\in\Omega}\left|h^{s+\Delta s}[q](x)-h^s[q](x)-\Delta s\frac{dh^s}{ds}[q](x)\right|\le\left\|h^{s+\Delta s}[q]-h^s[q]-\Delta s\frac{dh^s}{ds}[q]\right\|_1$

より、任意の $x\in\Omega$ において一様に

$\frac{dh^s}{ds}[q](x)=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{h^{s+\Delta s}[q](x)-h^s[q](x)}{\Delta s}$

である。

[16] ここで

$$\begin{aligned}
\left\|q^{t+\Delta t}-q^t-\dot q^t\Delta t\right\|_0&=\|\theta(*,t+\Delta t)-\theta(*,t)-\Delta t\cdot\theta_t(*,t)\|_0\\
&=|\Delta t|\|\theta_t(*,\tau)-\theta_t(*,t)\|_0\quad(\tau\in[\min\{t,t+\Delta t\},\max\{t,t+\Delta t\}])\\
&=o(|\Delta t|)
\end{aligned}$$

より

$\exists\psi\in M,q^{t+\Delta t}-q^t=\dot q^t\Delta t+o(|\Delta t|)\psi$

であることを用いた。

なる連続な双線型写像 $\delta^2 h^s[q;*,*]: T_q M \times T_q M \to T_{h^s[q]} M$ と

$$\frac{d\delta h^s}{ds}[q;\delta q] \coloneqq \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\delta h^{s+\Delta s}[q;\delta q] - \delta h^s[q;\delta q]}{\Delta s}, \quad \delta q \in T_q M \tag{48}$$

が存在し、また

$$\left\| \frac{dh^s}{ds}[q+\delta q] - \frac{dh^s}{ds}[q] - \delta\left(\frac{dh^s}{ds}\right)[q;\delta q] \right\|_0 = o(\|\delta q\|_0) \tag{49}$$

なる連続な線型写像 $\delta(dh^s/ds)[q;\delta q]: T_q M \to T_{h^s[q]} M$ が存在する[17]。

なお $d/ds\{(d/dt)h^s[q^t]\} = d/ds\{\delta h^s[q^t;\dot{q}^t]\}$ が $t \in [t_0, t_1]$ において連続であるとし

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{dh^s[q^t]}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dh^s[q^t]}{ds}\right) \tag{50}$$

が成り立つものとする[18]。

微分可能な変換 $\boldsymbol{h}: \boldsymbol{M} \to \boldsymbol{M}$ は接バンドル $\boldsymbol{TM}$ 上の変換 $(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) \mapsto (\boldsymbol{h}[\boldsymbol{q}], \boldsymbol{h}_*[\dot{\boldsymbol{q}}])$ を定義する。ただし $\boldsymbol{h}_*: \boldsymbol{T_q M} \to \boldsymbol{T_{h[q]} M}$ は接ベクトルの push-forward 写像で

$$h_*[\dot{q}^t] \coloneqq \frac{d}{dt} h[q^t] = \delta h[q^t;\dot{q}^t] \tag{51}$$

である。

Noether の定理：配位空間 M 上の１パラメータ微分同相変換群が Lagrangian を不変にするならば、それに対応して一つの第一積分が存在する。すなわち

---

17 このとき、(45)式と同様にして $(dh^s/ds)[q^t]$ が t に関して微分可能で

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dh^s}{ds}[q^t]\right) = \delta\left(\frac{dh^s}{ds}\right)[q^t;\dot{q}^t]$$

が成り立つことが示される。

18 一般に、$f^s \in M$ が $s \in \mathbb{R}$ に関して微分可能ならば

$$\sup_{x\in\Omega}\left| f^{s+\Delta s}(x) - f^s(x) - \Delta s \frac{df^s}{ds}(x) \right| \le \left\| f^{s+\Delta s} - f^s - \Delta s \frac{df^s}{ds} \right\|_1 = o(|\Delta s|)$$

であるから $\frac{df^s}{ds}(x) = \frac{df^s(x)}{ds}$ $(\forall x \in \Omega)$。したがって、任意の $x \in \Omega$ において

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{dh^s[q^t]}{ds}\right)(x) &= \frac{d}{dt}\left(\frac{dh^s[q^t](x)}{ds}\right) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left(\frac{dh^s[q^{t+\Delta t}](x)}{ds} - \frac{dh^s[q^t](x)}{ds}\right) \\
&= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{d}{ds}\left(\frac{h^s[q^{t+\Delta t}](x) - dh^s[q^t](x)}{\Delta t}\right) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{d}{ds}\left(\left.\frac{dh^s[q^t](x)}{dt}\right|_{t=t+\theta(x)\Delta t}\right) \\
&= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{d}{ds}\left(\left.\frac{dh^s[q^t]}{dt}\right|_{t=t+\theta(x)\Delta t}(x)\right) = \lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{d}{ds}\left.\frac{dh^s[q^t]}{dt}\right|_{t=t+\theta(x)\Delta t}\right)(x)
\end{aligned}$$

（ただし $0 \le \theta(x) \le 1$ ）が成り立つ。ここで $d/ds\{dh^s[q^t]/dt\}$ が $t \in [t_0, t_1]$ に関して連続ならば

$$\begin{aligned}
&\sup_{x\in\Omega}\left|\frac{d}{ds}\left(\frac{dh^s[q^{t+\theta(x)\Delta t}]}{dt}\right)(x) - \frac{d}{ds}\left(\frac{dh^s[q^t]}{dt}\right)(x)\right| \\
&\quad \le \left\|\frac{d}{ds}\left(\frac{dh^s[q^{t+\theta(x)\Delta t}]}{dt}\right) - \frac{d}{ds}\left(\frac{dh^s[q^t]}{dt}\right)\right\|_1 = o(|\theta(x)\Delta t|) = o(|\Delta t|)
\end{aligned}$$

したがって $\lim_{\Delta t\to 0}\frac{d}{ds}\left(\frac{dh^s[q^{t+\theta(x)\Delta t}]}{dt}\right)(x) = \frac{d}{ds}\left(\frac{dh^s[q^t]}{dt}\right)(x)$ であるから

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dh^s[q^t]}{ds}\right)(x) = \frac{d}{ds}\left(\frac{dh^s[q^t]}{dt}\right)(x)$$

が成り立つ。

$$L\left[h^s[q^t], h_*^s[\dot{q}^t]\right] = L[q^t, \dot{q}^t], \quad \forall s \in (-\epsilon, \epsilon) \tag{52}$$

が成り立つならば

$$I[q^t, \dot{q}^t] \coloneqq \delta_{\dot{q}} L\left[q^t, \dot{q}^t; \frac{dh^s}{ds}[q^t]\Big|_{s=0}\right] \tag{53}$$

なるスカラーに対して

$$\frac{d}{dt} I[q^t, \dot{q}^t] = 0 \tag{54}$$

が成り立つ。

Lemma (52)式が成り立つとする。そのとき $(q^t, \dot{q}^t)$ が Euler-Lagrange 方程式 : (41)式を満たすならば、任意の $s \in (-\epsilon, \epsilon)$ において、微分同相変換群 $h^s: M \to M$ によって変換した後の $(h^s[q^t], h_*^s[\dot{q}])$ も同様に Euler-Lagrange 方程式を満たす。すなわち

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{\delta L}{\delta \dot{q}}\left[h^s[q^t], h_*^s[\dot{q}]\right]\right\} - \frac{\delta L}{\delta q}\left[h^s[q^t], h_*^s[\dot{q}]\right] = 0 \quad \left(\forall s \in (-\epsilon, \epsilon)\right) \tag{55}$$

が成り立つ。

[証明]

(52)式 :

$$L[q^t, \dot{q}^t] = L\left[h^s[q^t], h_*^s[\dot{q}^t]\right] = L\left[h^s[q^t], \delta h^s[q^t; \dot{q}^t]\right] \tag{56}$$

より

$$\begin{aligned}
&L[q^t + \delta q^t, \dot{q}^t] - L\left[q^t, \dot{q^t}\right] \\
&\quad = L\left[h^s[q^t + \delta q^t], \delta h^s[q^t + \delta q^t; \dot{q}^t]\right] - L\left[h^s[q^t], \delta h^s[q^t; \dot{q}^t]\right] \\
&\quad = L\left[h^s[q^t + \delta q^t], \delta h^s[q^t + \delta q^t; \dot{q}^t]\right] - L\left[h^s[q^t], \delta h^s[q^t + \delta q^t; \dot{q}^t]\right] \\
&\qquad + L\left[h^s[q^t], \delta h^s[q^t + \delta q^t; \dot{q}^t]\right] - L\left[h^s[q^t], \delta h^s[q^t; \dot{q}^t]\right] \\
&\quad = L\left[h^s[q^t] + \delta h^s[q^t; \delta q^t] + o(\|\delta q^t\|_0)\phi, \delta h^s[q^t + \delta q^t; \dot{q}^t]\right] \\
&\qquad - L\left[h^s[q^t], \delta h^s[q^t + \delta q^t; \dot{q}^t]\right] \\
&\qquad + L[h^s[q^t], \delta h^s[q^t; \dot{q}^t] + \delta^2 h^s[q^t; \dot{q}^t, \delta q^t] + o(\|\delta q^t\|_0)\psi] \\
&\qquad - L\left[h^s[q^t], \delta h^s[q^t; \dot{q}^t]\right] \\
&\quad = \delta_q L[h^s[q^t], \delta h^s[q^t + \delta q^t; \dot{q}^t]; \delta h^s[q^t; \delta q^t] + o(\|\delta q^t\|_0)\phi] \\
&\qquad + o\|\delta h^s[q^t; \delta q^t] + o(\|\delta q^t\|_0)\phi\|_1 \\
&\qquad + \delta_{\dot{q}} L[h^s[q^t], \delta h^s[q^t; \dot{q}^t]; \delta^2 h^s[q^t; \dot{q}^t, \delta q^t] + o(\|\delta q^t\|_0)\psi] \\
&\qquad + o\|\delta^2 h^s[q^t; \dot{q}^t, \delta q^t] + o(\|\delta q^t\|_0)\psi\|_0 \\
&\quad = \delta_q L\left[h^s[q^t], \delta h^s[q^t; \dot{q}^t]; \delta h^s[q^t; \delta q^t]\right] \\
&\qquad + \delta_{\dot{q}} L\left[h^s[q^t], \delta h^s[q^t; \dot{q}^t]; \delta^2 h^s[q^t; \dot{q}^t, \delta q^t]\right] + o(\|\delta q^t\|_0)
\end{aligned} \tag{57}$$

および [19]

---

[19] ここで

$$\delta_q L\left[h^s[q^t], \delta h^s[q^t + \delta q^t; \dot{q}^t]; \delta h^s[q^t; \delta q^t]\right]$$

$$
\begin{aligned}
&L[q^t, \dot{q}^t + \delta\dot{q}^t] - L[q^t, \dot{q}^t] \\
&\quad = L\big[h^s[q^t], \delta h^s[q^t; \dot{q}^t + \delta\dot{q}^t]\big] - L\big[h^s[q^t], \delta h^s[q^t; \dot{q}^t]\big] \\
&\quad = L\big[h^s[q^t], \delta h^s[q^t; \dot{q}^t] + \delta h^s[q^t; \delta\dot{q}^t]\big] - L\big[h^s[q^t], \delta h^s[q^t; \dot{q}^t]\big] \\
&\quad = \delta_{\dot{q}} L\big[h^s[q^t], \delta h^s[q^t; \dot{q}^t]; \delta h^s[q^t; \delta\dot{q}^t]\big] + o\|\delta h^s[q^t; \delta\dot{q}^t]\|_0 \\
&\quad = \delta_{\dot{q}} L\big[h^s[q^t], \delta h^s[q^t; \dot{q}^t]; \delta h^s[q^t; \delta\dot{q}^t]\big] + o\|\delta\dot{q}^t\|_0
\end{aligned}
\tag{58}
$$

であるから

$$
\begin{aligned}
\delta_q L\big[q^t, \dot{q}^t; \delta q^t\big] = {}& \delta_q L\big[h^s[q^t], \delta h^s[q^t; \dot{q}^t]; \delta h^s[q^t; \delta q^t]\big] \\
&+ \delta_{\dot{q}} L\big[h^s[q^t], \delta h^s[q^t; \dot{q}^t]; \delta^2 h^s[q^t; \dot{q}^t, \delta q^t]\big]
\end{aligned}
\tag{59}
$$

および

$$
\delta_{\dot{q}} L[q^t, \dot{q}^t; \delta\dot{q}^t] = \delta_{\dot{q}} L\big[h^s[q^t], \delta h^s[q^t; \dot{q}^t]; \delta h^s[q^t; \delta\dot{q}^t]\big] \tag{60}
$$

が成り立つ。したがって、任意の $\delta q^t \in C_0^1(\Omega)$ に対して

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega \frac{\delta L}{\delta q}[q^t, \dot{q}^t](x)\delta q^t(x)dx \\
&\quad = \int_\Omega \frac{\delta L}{\delta q}\big[h^s[q^t], \delta h^s[q^t; \dot{q}^t]\big](x)\delta h^s[q^t; \delta q^t](x)dx \\
&\qquad + \int_\Omega \frac{\delta L}{\delta \dot{q}}\big[h^s[q^t], \delta h^s[q^t; \dot{q}^t]\big](x)\delta^2 h^s[q^t; \dot{q}^t, \delta q^t](x)dx
\end{aligned}
\tag{61}
$$

および

$$
\begin{aligned}
&= \delta_q L\big[h^s[q^t], \delta h^s[q^t; \dot{q}^t] + \delta^2 h^s[q^t; \dot{q}^t, \delta q^t] + o(\|\delta q^t\|_0); \delta h^s[q^t; \delta q^t]\big] \\
&= \delta_q L\big[h^s[q^t], \delta h^s[q^t; \dot{q}^t]; \delta h^s[q^t; \delta q^t]\big] \\
&\quad + \delta_{\dot{q}}\delta_q L[h^s[q^t], \delta h^s[q^t; \dot{q}^t]; \delta h^s[q^t; \delta q^t], \delta^2 h^s[q^t; \dot{q}^t, \delta q^t] + o(\|\delta q^t\|_0)] \\
&\quad + o(\|\delta^2 h^s[q^t; \dot{q}^t, \delta q^t] + o(\|\delta q^t\|_0)\|_0) \\
&= \delta_q L\big[h^s[q^t], \delta h^s[q^t; \dot{q}^t]; \delta h^s[q^t; \delta q^t]\big] + o(\|\delta q^t\|_0)
\end{aligned}
$$

を用いた。

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega \frac{\delta L}{\delta \dot q}[q^t,\dot q^t](x)\delta \dot q^t(x)dx &= \int_\Omega \frac{\delta L}{\delta \dot q}\big[h^s[q^t],\delta h^s[q^t;\dot q^t]\big](x)\delta h^s[q^t;\delta \dot q^t](x)dx \\
&= \int_\Omega \frac{\delta L}{\delta \dot q}\big[h^s[q^t],\delta h^s[q^t;\dot q^t]\big](x)\int_\Omega \frac{\delta h^s}{\delta q}[q^t](x,y)\delta \dot q^t(y)dy\,dx \\
&= \int_\Omega \left\{\int_\Omega \frac{\delta L}{\delta \dot q}\big[h^s[q^t],\delta h^s[q^t;\dot q^t]\big](x)\frac{\delta h^s}{\delta q}[q^t](x,y)dx\right\}\delta \dot q^t(y)dy \\
&= -\int_\Omega \frac{d}{dt}\left\{\int_\Omega \frac{\delta L}{\delta \dot q}\big[h^s[q^t],\delta h^s[q^t;\dot q^t]\big](x)\frac{\delta h^s}{\delta q}[q^t](x,y)dx\right\}\delta q^t(y)dy \\
&= -\int_\Omega \left(\int_\Omega \frac{d}{dt}\left\{\frac{\delta L}{\delta \dot q}\big[h^s[q^t],\delta h^s[q^t;\dot q^t]\big](x)\right\}\frac{\delta h^s}{\delta q}[q^t](x,y)dx\right)\delta q^t(y)dy \\
&\quad -\int_\Omega \left(\int_\Omega \frac{\delta L}{\delta \dot q}\big[h^s[q^t],\delta h^s[q^t;\dot q^t]\big](x)\frac{d}{dt}\left\{\frac{\delta h^s}{\delta q}[q^t](x,y)\right\}dx\right)\delta q^t(y)dy \\
&= -\int_\Omega \frac{d}{dt}\left\{\frac{\delta L}{\delta \dot q}\big[h^s[q^t],\delta h^s[q^t;\dot q^t]\big](x)\right\}\int_\Omega \frac{\delta h^s}{\delta q}[q^t](x,y)\delta q^t(y)dy\,dx \\
&\quad -\int_\Omega \frac{\delta L}{\delta \dot q}\big[h^s[q^t],\delta h^s[q^t;\dot q^t]\big](x)\int_\Omega \frac{d}{dt}\left\{\frac{\delta h^s}{\delta q}[q^t](x,y)\right\}\delta q^t(y)dy\,dx \\
&= -\int_\Omega \frac{d}{dt}\left\{\frac{\delta L}{\delta \dot q}\big[h^s[q^t],\delta h^s[q^t;\dot q^t]\big](x)\right\}\delta h^s[q^t;\delta q^t](x)dx \\
&\quad -\int_\Omega \frac{\delta L}{\delta \dot q}\big[h^s[q^t],\delta h^s[q^t;\dot q^t]\big](x)\delta^2 h^s[q^t;\delta q^t,\dot q^t](x)dx
\end{aligned} \tag{62}
$$

が成り立つ[20]が、Euler-Lagrange方程式より

---

[20] ここで

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega \frac{d}{dt}\left\{\frac{\delta h^s}{\delta q}[q^t](x,y)\right\}\delta q^t(y)dy &= \int_\Omega \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left\{\frac{\delta h^s}{\delta q}[q^{t+\Delta t}](x,y)-\frac{\delta h^s}{\delta q}[q^t](x,y)\right\}\delta q^t(y)dy \\
&= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int_\Omega \left\{\frac{\delta h^s}{\delta q}[q^{t+\Delta t}](x,y)-\frac{\delta h^s}{\delta q}[q^t](x,y)\right\}\delta q^t(y)dy \\
&= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\{\delta h^s[q^{t+\Delta t};\delta q^t](x)-\delta h^s[q^t;\delta q^t](x)\} \\
&= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left\{\delta^2 h^s[q^t;\delta q^t,q^{t+\Delta t}-q^t](x)+o\left(\left\|q^{t+\Delta t}-q^t\right\|_0\right)\phi(x)\right\} \\
&= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\{\delta^2 h^s[q^t;\delta q^t,\dot q^t\Delta t+o(|\Delta t|)\psi](x)+o(\|\dot q^t\Delta t+o(|\Delta t|)\psi\|_0)\phi(x)\} \\
&= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\{\delta^2 h^s[q^t;\delta q^t,\dot q^t\Delta t](x)+\delta^2 h^s[q^t;\delta q^t,o(|\Delta t|)\psi](x)+o(|\Delta t|)\phi(x)\} \\
&= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\{\Delta t\cdot\delta^2 h^s[q^t;\delta q^t,\dot q^t](x)+o(|\Delta t|)\chi(x)\} = \delta^2 h^s[q^t;\delta q^t,\dot q^t](x)
\end{aligned}
$$

ただし

$$\chi(x) \coloneqq \delta^2 h^s[q^t;\delta q^t,\psi](x)+\phi(x)$$

なる関係を用いた。

$$\int_\Omega \frac{\delta L}{\delta q}[q^t,\dot{q}^t](x)\delta q^t(x)dx + \int_\Omega \frac{\delta L}{\delta \dot{q}}[q^t,\dot{q}^t](x)\delta \dot{q}^t(x)dx = 0 \tag{63}$$

であるから

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \frac{\delta L}{\delta q}\left[h^s[q^t],\delta h^s[q^t;\dot{q}^t]\right](x)\delta h^s[q^t;\delta q^t](x)dx \\ &\qquad - \int_\Omega \frac{d}{dt}\left\{\frac{\delta L}{\delta \dot{q}}\left[h^s[q^t],\delta h^s[q^t;\dot{q}^t]\right](x)\right\}\delta h^s[q^t;\delta q^t](x)dx = 0\end{aligned} \tag{64}$$

となる。したがって $C_0^1(\Omega) \subset \delta h^s[q^t;C_0^1(\Omega)]$ ならば[21]

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{\delta L}{\delta \dot{q}}\left[h^s[q^t],h_*^s[\dot{q}^t]\right]\right\} - \frac{\delta L}{\delta q}\left[h^s[q^t],h_*^s[\dot{q}^t]\right] = 0 \tag{65}$$

が成り立つ[22]。これは $(q^t,\dot{q}^t)$ がEuler-Lagrange方程式を満たすならば、任意の $s \in (-\epsilon,\epsilon)$ において $(h^s[q^t],h_*^s[\dot{q}^t])$ もそれを満たすことを示している。

■

[Noether の定理の証明]

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}L\left[h^s[q^t],h_*^s[\dot{q}^t]\right] &= \lim_{\Delta s\to 0}\frac{L\left[h^{s+\Delta s}[q^t],h_*^{s+\Delta s}[\dot{q}^t]\right] - L\left[h^s[q^t],h_*^s[\dot{q}^t]\right]}{\Delta s} \\ &= \lim_{\Delta s\to 0}\frac{L\left[h^{s+\Delta s}[q^t],\delta h^{s+\Delta s}[q^t;\dot{q}^t]\right] - L\left[h^s[q^t],\delta h^s[q^t,\dot{q}^t]\right]}{\Delta s}\end{aligned} \tag{66}$$

を計算すると、ある $\phi \in M$ が存在して

$$\begin{aligned}&L\left[h^{s+\Delta s}[q^t],\delta h^{s+\Delta s}[q^t;\dot{q}^t]\right] - L\left[h^{s+\Delta s}[q^t],\delta h^s[q^t;\dot{q}^t]\right] \\ &= L\left[h^{s+\Delta s}[q^t],\delta h^s[q^t;\dot{q}^t] + \Delta s\frac{d\delta h^s}{ds}[q^t;\dot{q}^t] + o(|\Delta s|)\phi\right] \\ &\quad - L\left[h^{s+\Delta s}[q^t],\delta h^s[q^t;\dot{q}^t]\right] \\ &= \delta_{\dot{q}}L\left[h^{s+\Delta s}[q^t],\delta h^s[q^t;\dot{q}^t];\Delta s\frac{d\delta h^s}{ds}[q^t;\dot{q}^t] + o(|\Delta s|)\phi\right] \\ &\quad + o\left(\left\|\Delta s\frac{d\delta h^s}{ds}[q^t;\dot{q}^t] + o(|\Delta s|)\phi\right\|\right) \\ &= \Delta s\cdot\delta_{\dot{q}}L\left[h^{s+\Delta s}[q^t],\delta h^s[q^t;\dot{q}^t];\frac{d}{ds}\left(\frac{d}{dt}h^s[q^t]\right)\right] + o(|\Delta s|)\end{aligned} \tag{67}$$

---

21 これは $h^s\colon M \to M$ が微分同相写像であることから保証される。

22 関数 $\psi(x,t) \coloneqq \frac{\delta L}{\delta \dot{q}}\left[h^s[q^t],h_*^s[\dot{q}^t]\right](x)$ において $\frac{d}{dt}\left\{\frac{\delta L}{\delta \dot{q}}\left[h^s[q^t],h_*^s[\dot{q}^t]\right]\right\}(x) = \frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t)$ である。関数 ψ の t に関する微分可能性は、δL と h^s および δh^s の微分可能性と q^t の時間に関する 2 階微分可能性から保証される。

および

$$
\begin{aligned}
&L\left[h^{s+\Delta s}[q^t], \delta h^s[q^t;\dot{q}^t]\right] - L\left[h^s[q^t], \delta h^s[q^t;\dot{q}^t]\right] \\
&= L\left[h^s[q^t] + \Delta s \frac{dh^s}{ds}[q^t] + o(|\Delta s|)\phi, \delta h^s[q^t;\dot{q}^t]\right] - L\left[h^s[q^t], \delta h^s[q^t;\dot{q}^t]\right] \\
&= \delta_q L\left[h^s[q^t], \delta h^s[q^t;\dot{q}^t]; \Delta s \frac{dh^s}{ds}[q^t] + o(|\Delta s|)\phi\right] \\
&\quad + o\left(\left\|\Delta s \frac{dh^s}{ds}[q^t] + o(|\Delta s|)\phi\right\|\right) \\
&= \Delta s \cdot \delta_q L\left[h^s[q^t], \delta h^s[q^t;\dot{q}^t]; \frac{dh^s}{ds}[q^t]\right] + o(|\Delta s|)
\end{aligned} \tag{68}
$$

であるから

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{ds} L\left[h^s[q^t], h^s_*[\dot{q}^t]\right] \\
&= \lim_{\Delta s \to 0} \frac{L[h^{s+\Delta s}[q^t], \delta h^{s+\Delta s}[q^t;\dot{q}^t] - L\left[h^{s+\Delta s}[q^t], \delta h^s[q^t,\dot{q}^t]\right]}{\Delta s} \\
&\quad + \lim_{\Delta s \to 0} \frac{L[h^{s+\Delta s}[q^t], \delta h^s[q^t;\dot{q}^t] - L\left[h^s[q^t], \delta h^s[q^t,\dot{q}^t]\right]}{\Delta s} \\
&= \delta_{\dot{q}} L\left[h^s[q^t], \delta h^s[q^t;\dot{q}^t]; \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{ds} h^s[q^t]\right)\right] \\
&\quad + \delta_q L\left[h^s[q^t], \delta h^s[q^t;\dot{q}^t]; \frac{dh^s}{ds}[q^t]\right]
\end{aligned} \tag{69}
$$

が得られる [23]。したがって (52)式より

$$
\delta_{\dot{q}} L\left[h^s[q^t], h^s_*[\dot{q}]; \frac{d}{dt}\left(\frac{dh^s}{ds}[q^t]\right)\right] + \delta_q L\left[h^s[q^t], h^s_*[\dot{q}]; \frac{dh^s}{ds}[q^t]\right] = 0 \tag{70}
$$

が成り立つ [24]（$\forall t \in [t_0, t_1], \forall s \in (-\epsilon, \epsilon)$）。すなわち

$$
\begin{aligned}
&\delta_{\dot{q}} L\left[h^s[q^t], h^s_*[\dot{q}]; \frac{d}{dt}\left(\frac{dh^s}{ds}[q^t]\right)\right] + \delta_q L\left[h^s[q^t], h^s_*[\dot{q}]; \frac{dh^s}{ds}[q^t]\right] \\
&= \int_\Omega \frac{\delta L}{\delta \dot{q}}\left[h^s[q^t], h^s_*[\dot{q}]\right](x) \frac{d}{dt}\left(\frac{dh^s}{ds}[q^t]\right)(x)dx \\
&\quad + \int_\Omega \frac{\delta L}{\delta q}\left[h^s[q^t], h^s_*[\dot{q}]\right](x) \frac{dh^s}{ds}[q^t](x)dx = 0
\end{aligned} \tag{71}
$$

であるが、Lemma より

---

[23] ここで $\delta_{\dot{q}} L$ と $\delta_q L$ が連続であること、また $h^s[q]$ が s に関して連続であることを用いた。

[24] ここで(50)式：$\frac{d}{ds}\left(\frac{d}{dt} h^s[q^t]\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{ds} h^s[q^t]\right)$ と(51)式：$\delta h[q^t;\dot{q}^t] = h_*[\dot{q}^t]$ を用いた。

$$
\begin{aligned}
&\int_{\Omega}\frac{\delta L}{\delta \dot{q}}\big[h^s[q^t],h_*^s[\dot{q}]\big](x)\frac{d}{dt}\left(\frac{dh^s[q^t]}{ds}\right)(x)dx \\
&\qquad+\int_{\Omega}\frac{\delta L}{\delta q}\big[h^s[q^t],h_*^s[\dot{q}]\big](x)\frac{dh^s}{ds}[q^t](x)dx \\
&\quad=\int_{\Omega}\frac{\delta L}{\delta \dot{q}}\big[h^s[q^t],h_*^s[\dot{q}]\big](x)\frac{d}{dt}\left(\frac{dh^s[q^t]}{ds}(x)\right)dx \\
&\qquad+\int_{\Omega}\frac{d}{dt}\left\{\frac{\delta L}{\delta \dot{q}}\big[h^s[q^t],h_*^s[\dot{q}]\big](x)\right\}\frac{dh^s}{ds}[q^t](x)dx \\
&\quad=\frac{d}{dt}\int_{\Omega}\frac{\delta L}{\delta \dot{q}}\big[h^s[q^t],h_*^s[\dot{q}]\big](x)\frac{dh^s}{ds}[q^t](x)dx \\
&\quad=\frac{d}{dt}\delta_{\dot{q}}L\left[h^s[q^t],h_*^s[\dot{q}];\frac{dh^s}{ds}[q^t]\right]
\end{aligned}
\tag{72}
$$

であるから

$$
\frac{d}{dt}\delta_{\dot{q}}L\left[h^s[q^t],h_*^s[\dot{q}];\frac{dh^s}{ds}[q^t]\right]=0 \tag{73}
$$

特に $\boldsymbol{s=0}$ とすると

$$
\frac{d}{dt}\delta_{\dot{q}}L\left[q^t,\dot{q}^t;\frac{dh^s}{ds}[q^t]\bigg|_{s=0}\right]=0 \tag{74}
$$

が得られる。

■